

AUSARBEITUNG  
im Fach Simulation und numerische Methoden (SoS 2010)

---

# Fraktale Geometrie

Mathematische Grundlagen, Fraktale, Hausdorff-Dimension, fraktale Mengen

---

B.Eng. René SCHWARZ  
E-Mail: [mail@rene-schwarz.com](mailto:mail@rene-schwarz.com)  
Internet: <http://www.rene-schwarz.com>

27. Juli 2010

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Iterationen von Funktionen . . . . .	1
1.2	Fixpunktsatz von Banach . . . . .	1
1.3	Periodische Punkte: Anziehung/Abstoßung/Indifferenz, Orbits . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Fraktale</b>	<b>5</b>
2.1	Einführung . . . . .	5
2.2	Hausdorff-Dimension . . . . .	7
2.3	Fraktale Mengen . . . . .	8
2.3.1	Mandelbrot-Menge . . . . .	8
2.3.2	Julia-Mengen . . . . .	9
2.3.3	Cantor-Menge/Cantorstaub . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Beispiele für weitere Fraktale in Mathematica</b>	<b>10</b>
3.1	Barnsley Fern . . . . .	10
3.2	Fractal Tree . . . . .	11
3.3	von Koch-Schneeflocke . . . . .	11
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>



# 1 Mathematische Grundlagen

## 1.1 Iterationen von Funktionen

Der Begriff Iteration bezeichnet eine Methode aus der numerischen Mathematik, um sich der exakten Lösung eines Rechenproblems schrittweise zu nähern. Das Verfahren wird dabei wiederholt angewendet. Anwendung finden Iterationen vor allen Dingen bei Gleichungen, deren Ergebnis sich nicht in geschlossener Form berechnen lässt, z.B. bei der KEPLER-Gleichung<sup>1</sup>.

**Definition 1** (Iteration). Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto y$ . Dann kennzeichnet  ${}^k f(x)$  die  $k$ -te Iteration<sup>2</sup> von  $f(x)$ :

$${}^k f(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{k \text{ mal}} \quad (1)$$

**Beispiel 1.** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y$  mit  $f(x) = 2x - x^2$ . Die ersten drei Iterationen von  $f(x)$  lauten dann:

$${}^1 f(x) = 2x - x^2$$

$${}^2 f(x) = f(f(x)) = f(2x - x^2) = 2(2x - x^2) - (2x - x^2)^2$$

$${}^3 f(x) = f(f(f(x))) = f(x(4 - 6x + 4x^2 - x^3)) = 2(x(4 - 6x + 4x^2 - x^3)) - (x(4 - 6x + 4x^2 - x^3))^2$$

Die obige Definition findet nachfolgend Anwendung bei periodischen Punkten und der MANDELBROT-Menge.

## 1.2 Fixpunktsatz von Banach

Der Fixpunktsatz von BANACH<sup>3</sup> besagt, dass eine Kontraktion eines vollständigen metrischen Raums genau einen Fixpunkt besitzt. Zudem liefert der Fixpunktsatz eine Abschätzung der Konvergenz und eine Fehlerabschätzung für die Fixpunktiteration.

**Satz 1** (Fixpunktsatz von BANACH). Ist  $\varphi : D \rightarrow D$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $D$  abgeschlossen, eine Selbstabbildung und eine Kontraktion, so hat  $\varphi$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in D : x^* = \varphi(x^*)$ .

Für das Iterationsverfahren  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt dann  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$  für jeden Startwert  $x_0 \in D$ . [7]

**Definition 2** (Abgeschlossenheit von Mengen). Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt *abgeschlossen*, wenn mit jeder Folge  $(d_n) \subseteq D$  auch deren Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = k$  zu  $D$  gehört ( $k \in D$ ). [7]

<sup>1</sup> $M = E - e \cdot \sin(E)$ ,  $E$  ist zu berechnen,  $M$  und  $e$  bekannt

<sup>2</sup>Üblich ist die Schreibweise  $f^k(x)$ . Der Autor hat sich aufgrund der Verwechslungsgefahr mit der  $k$ -ten Potenz der Funktion bewusst gegen diese Schreibweise entschieden.

<sup>3</sup>Stefan BANACH (\* 1892 in Krakau, † 1945 in Lemberg) war ein polnischer Mathematiker. Er gilt als Begründer der modernen Funktionalanalysis. Bekannte Arbeiten: BANACH-RÄUME, Fixpunktsatz von BANACH, BANACH-TARSKI-PARADOXON. [22]

**Definition 3** (Selbstabbildung). Eine *Selbstabbildung* ist eine Abbildung, die eine Menge in sich selbst abbildet. Selbstabbildungen werden auch Transformationen genannt. [20]

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b] \quad (2)$$

**Definition 4** (Kontraktion). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Abbildung  $\varphi : D \rightarrow D$  heißt *Kontraktion*, wenn es eine Zahl  $\lambda \in [0, 1)$  gibt, mit der  $\forall x, y \in D$  gilt:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (3)$$

Man nennt die Abbildung dann auch *kontrahierend* oder auch *kontraktiv* auf  $D$ . [17] Die Zahl  $\lambda$  wird *Kontraktionskonstante* genannt.

Für eindimensionale metrische Räume gilt entsprechend

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \lambda \cdot |y - x|. \quad (4)$$

Der Nachweis einer Selbstabbildung wird zunächst über den Nachweis einer Monotonie der Funktion  $\varphi(x)$  erbracht. Ist  $\varphi'(x) \geq 0 \forall x \in D$ , dann ist  $\varphi(x)$  monoton wachsend. Es reicht dann aus, die Randwerte zu untersuchen.

Die Kontraktionseigenschaft lässt sich über

$$\lambda = \max_{x \in D} |\varphi'(x)| \quad (5)$$

ermitteln, sofern  $\varphi(x)$  stetig-differenzierbar ist. Die Einhaltung der Bedingung nach Gleichung 4 wird anschließend überprüft.

**Beispiel 2.** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y$  mit  $f(x) = x^9 + x^7 - 100x + 1$  und  $x \in [0, 1]$ . Weist die Funktion  $f(x)$  die Eigenschaften einer Selbstabbildung und Kontraktion auf? Bestimmen Sie ggf. die Kontraktionskonstante sowie den Fixpunkt mit einer Genauigkeit  $\leq 10^{-3}$ ! [2, 7]

#### Schritt 1

Umstellung der Gleichung zu einem Fixpunktproblem:

$$f(x) = x^9 + x^7 - 100x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{x^9 + x^7 + 1}{100} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^9 + x^7 + 1}{100} \quad (7)$$

#### Schritt 2

Ist  $\varphi(x)$  eine Selbstabbildung von  $D \rightarrow D$  mit  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $D = [0, 1]$ ?

#### Schritt 2a

Monotonieuntersuchung

$$\varphi'(x) = \frac{9x^8 + 7x^6}{100} > 0 \forall x \in (0, 1] \quad (8)$$

$\varphi(x)$  ist somit für alle  $x \in (0, 1]$  monoton wachsend.

### Schritt 2b

Bildet  $\varphi(x)$  von  $D \rightarrow D \forall x \in D$  ab?

$$[\varphi(0), \varphi(1)] = \left[ \frac{1}{100}, \frac{3}{100} \right] \subseteq [0, 1] \quad (9)$$

Durch die Untersuchung der Randwerte<sup>4</sup> steht nun fest, dass alle Transformationen mit  $\varphi(x)$  von  $D \rightarrow D$  abbilden.  $\varphi(x)$  ist somit eine Selbstabbildung.

### Schritt 3

Kontraktionskonstante ermitteln:

$$\lambda = \max_{x \in D} |\varphi'(x)| = \varphi'(1) = \frac{16}{100} \quad (10)$$

### Schritt 4

Nach wievielen Schritten ist die geforderte Genauigkeit erreicht?

$$|x_i - x^*| \leq \frac{\lambda^i}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \leq 10^{-3} \quad (11)$$

Mit  $\lambda = \frac{16}{100}$ ,  $x_0 = 0$  und  $x_1 = \frac{1}{100}$  erhält man

$$\frac{\left(\frac{16}{100}\right)^i}{1 - \frac{16}{100}} \cdot \frac{1}{100} \leq 10^{-3} \implies \left(\frac{16}{100}\right)^i \leq 84 \cdot 10^{-3} \implies i \geq \log_{\frac{16}{100}}(84 \cdot 10^{-3}) \approx 1,3516 \quad (12)$$

### Schritt 5

Ermittlung des Fixpunktes mit der vorgegebenen Genauigkeit (und der dafür ermittelten Anzahl an Iterationsschritten):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (13)$$

$$x_0 = 0 \quad (14)$$

$$x_1 = \varphi(0) = \frac{1}{100} = 10^{-2} \quad (15)$$

$$x_2 = \varphi(\varphi(0)) = \varphi(10^{-2}) = \frac{(10^{-2})^9 + (10^{-2})^7 + 1}{100} \approx 10^{-2} \quad (16)$$

## 1.3 Periodische Punkte: Anziehung/Abstoßung/Indifferenz, Orbits

**Definition 5** (Periodischer Punkt, Orbit, Periode). Ein Punkt  $z_0$  heißt *periodischer Punkt* einer rationalen Funktion  $R(z)$  falls  $z_0$  Fixpunkt eines  ${}^m R(z_0) = z_0$  ist. Für einen solchen Punkt gibt es ein  $n \geq 0$ , so dass  $z, R(z), \dots, {}^{n-1}R(z)$  paarweise verschieden sind, aber  ${}^n R(z_0) = z_0$ . Die Menge  $\{z, R(z), \dots, {}^{n-1}R(z)\}$  heißt *Orbit* von  $R(z)$  bezüglich  $z_0$  und  $n$  die *Periode* von  $z_0$ . [1]

<sup>4</sup>Dies ist möglich, da bekannt ist, dass  $\varphi(x)$  eine monoton wachsende Funktion ist.

**Definition 6** (Präperiodischer Punkt). Ein Punkt  $z$  heißt *präperiodisch* unter einer rationalen Funktion  $R(z)$ , falls er selbst nicht periodisch ist, aber eine Iteration  ${}^n R(z)$  periodisch ist. [1]

**Definition 7** (Anziehende, abstoßende und indifferente Punkte). Ist  $z_0$  ein periodischer Punkt und gilt  $|R'(z_0)| < 1$ , dann bezeichnet man den periodischen Punkt als *anziehend*, im Falle von  $|R'(z_0)| > 1$  als *abstoßend* und bei  $|R'(z_0)| = 1$  als *indifferent*.

**Beispiel 3** (Periodische Punkte).  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $R(z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot z$ ,  $z_0 = 1$

$$\begin{aligned} z_1 &= R(z_0) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ z_2 &= {}^2R(z_0) = j \\ z_3 &= {}^3R(z_0) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ &\vdots \\ z_8 &= {}^8R(z_0) = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

Bei  $z_0$  handelt es sich somit um einen periodischen Punkt der Periode 8. Der Orbit von  $R(z)$  bezüglich  $z_0$  lässt sich mit  $\{z_0, R(z_0), {}^2R(z_0), {}^3R(z_0), \dots, {}^7R(z_0)\} = \left\{1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, j, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \dots, {}^7R(z_0)\right\}$  angeben. Die Punkte  $z_i$  für  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i \in [2, 7]$  sind präperiodische Punkte.

**Beispiel 4** (Abstoßende/Anziehende/Indifferente periodische Punkte). Gegeben sei  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(z) = 2z - z^2$ ,  $z_{0_1} = 0$ ,  $z_{0_2} = 1$ . Untersuchen Sie die Anziehungseigenschaften von  $z_{0_1}$  und  $z_{0_2}$ !

$$\begin{aligned} R(z) &= 2z - z^2 \\ R'(z) &= 2 - 2z \\ |R'(0)| &= 2 > 1 \Rightarrow \text{abstoßender periodischer Punkt} \\ |R'(1)| &= 0 < 1 \Rightarrow \text{anziehender periodischer Punkt} \end{aligned} \tag{18}$$

**Satz 2** (Fundamentalsatz der Algebra). Jede Polynomgleichung hat in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Lösung.

Jede rationale Gleichung lässt sich als Polynomgleichung darstellen.

**Satz 3.** Ist  $z_0$  Lösung der Fixpunkt-Gleichung  $R(z) = z$ , so ist  $z_0$  auch Lösung jeder Gleichung  ${}^n R(z) = z$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2 Fraktale

### 2.1 Einführung

Der Begriff Fraktal (lat. *fractus*: gebrochen, von *frangere*: brechen, in Stücke zerbrechen) wurde von Benoît MANDELBROT<sup>5</sup> 1982 mit seinem Werk „The Fractal Geometry of Nature“ geprägt.

**Definition 8** (Fraktale). *Fraktale* sind natürliche oder künstliche Gebilde bzw. geometrische Muster, die einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit bzw. Skaleninvarianz aufweisen. Jede Menge mit nicht-ganzzahliger Dimension ist ein *Fraktal*. [12]

Viele Fraktale weisen eine gebrochene und nicht natürliche fraktale Dimension auf (vgl. Definition 8). Die Umkehrung gilt aber nicht: Fraktale können auch eine ganzzahlige Dimension besitzen (z.B. die BROWNSche Bewegung).

Anwendung finden Fraktale beispielsweise zur Modellierung/Simulation von

- am Himmel vorbeiziehenden Wolken
- Börsenschwankungen
- menschlichen Blutgefäßen
- Schwämmen/Filtermaterialien
- Wachstumsprozessen
- Lungen
- Kühl- und Verdunstungskörpern (Körper mit großen Oberflächen)
- Landschaften und
- Straßennetzen.

Mit **Selbstähnlichkeit** bezeichnet man die Eigenschaft eines Fraktals, dass dessen einzelne Teile immer wieder aus dem gleichen Grundobjekt bestehen. Es handelt sich dabei um eine maßstäbliche Wiederholung. Fraktale sind nicht zwangsläufig strikt selbstähnlich (kleinere Abweichungen können auftreten).

Erhält man allerdings bei unendlicher Vergrößerung immer wieder die ursprüngliche Grundstruktur, ohne jemals eine elementare Feinstruktur zu erhalten, so spricht man von **striker Selbstähnlichkeit**. Strikte Selbstähnlichkeit impliziert Skaleninvarianz.

Wenn sich die wesentlichen Eigenschaften eines Gebildes (Eigenarten, Charakteristika, Eckwerte, Hausdorff-Dimension) bei einer Skalierung nicht ändern, so spricht man von **Skaleninvarianz**. Es ist somit ein Zustand der Universalität gegeben, auch wenn sich die Betrachtungsparameter (z.B. die Skalierung) ändern.

In einfachen Fällen bestehen Fraktale aus einer bestimmten oder unendlichen Anzahl von verkleinerten Kopien ihrer selbst – einer Grundfigur.

Die Anzahl der Iterationen bis zur derzeitigen Figur wird mit  $n$  bezeichnet.  $A(n)$  gibt die Anzahl der zur Überdeckung der Figur notwendigen Teilstrecken im aktuellen Iterationsschritt an. Jede dieser Teilstrecken besitzt eine identische Länge  $\varepsilon(n)$ . Summiert man die Länge  $\varepsilon(n)$  aller Teilstrecken auf, so ergibt sich die Gesamtlänge  $L(n)$ :

$$L(n) = \sum_0^n \varepsilon(n) = A(n) \cdot \varepsilon(n). \quad (19)$$

<sup>5</sup>Benoît B. MANDELBROT (\* 1924 in Warschau) ist ein französisch-US-amerikanischer Mathematiker. [9]

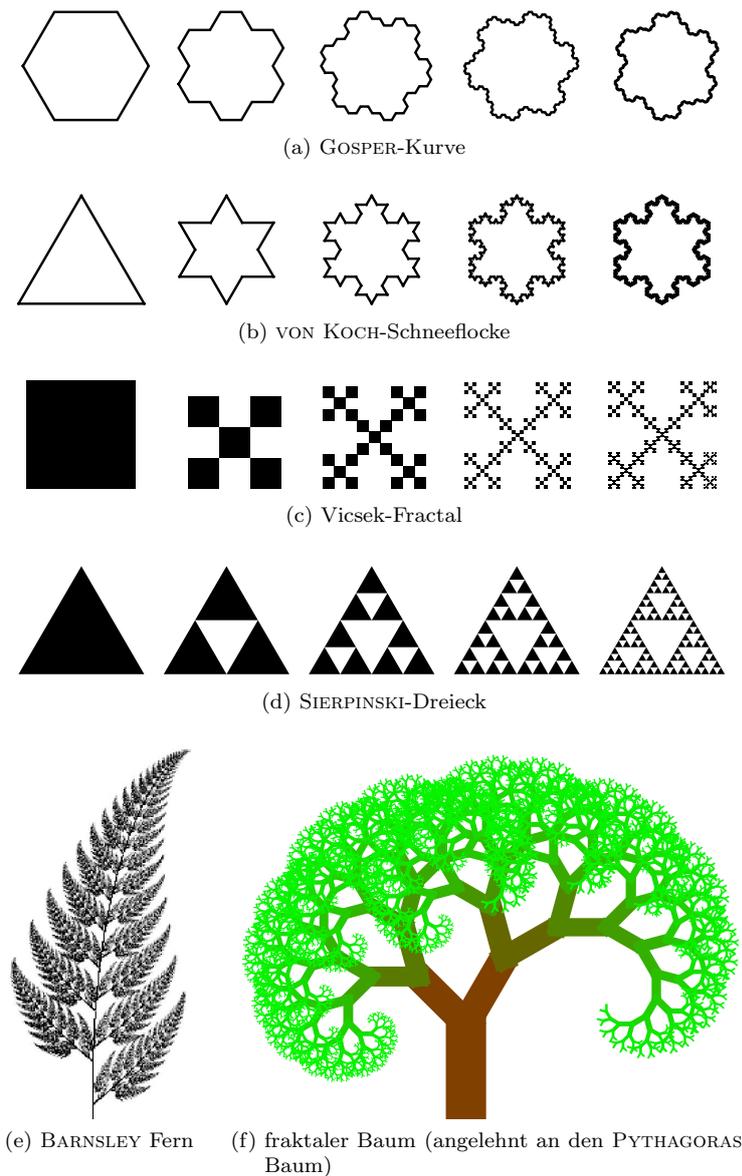
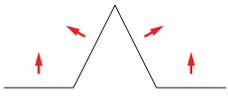
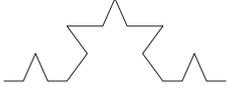


Abbildung 1: Zusammenstellung bekannter Fraktale (erzeugt aus [4, 8]).

Selbstähnlichkeit	strikte Selbstähnlichkeit
MANDELBROT-Menge	VON KOCH-Kurve
JULIA-Mengen	CANTOR-Menge
	SIERPINSKI-Dreieck

Tabelle 1: Beispiele für selbstähnliche Fraktale

**Beispiel 5** (Konstruktion der VON KOCH-Kurve).

n	Figur	A(n)	ε(n)	L(n)	F(n)
0		1	1	1	$(\frac{4}{9})^0 = 1$
1		4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{9})^1$
2		4 <sup>2</sup>	$\frac{1}{3^2}$	$(\frac{4}{3})^2$	$(\frac{4}{9})^2$
3		4 <sup>3</sup>	$\frac{1}{3^3}$	$(\frac{4}{3})^3$	$(\frac{4}{9})^3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	Fraktal	∞	0	∞	$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{4}{9})^n = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$

Während sich die Gesamtlänge  $L(n)$  der zur Überdeckung notwendigen Teilstrecken für eine unendlich große Anzahl von Iterationsschritten  $n$  dem Unendlichen nähert, bleibt die Fläche  $F(n)$  des Fraktals hingegen endlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = \infty \tag{20}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) < \infty \tag{21}$$

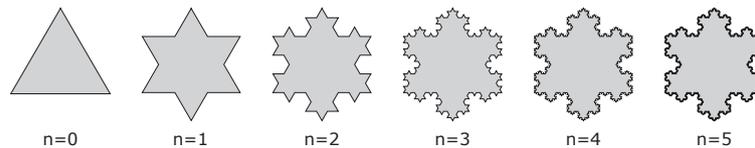


Abbildung 2: VON KOCH-Schneeflocke

### 2.2 Hausdorff-Dimension

In der klassischen, euklidischen Geometrie wird ein Dimensionsbegriff geprägt, der sich auch im Allgemeinwissen etabliert hat. So ist ein Punkt ohne Ausdehnung ein 0-dimensionales (im Folgenden mit „0-D“ bezeichnet) Gebilde, eine Linie ein 1-D, eine Fläche ein 2-D und ein Körper (räumlich) ein 3-D-Gebilde.

Die fraktale Dimension ist nun die Erweiterung der klassischen, euklidischen Geometrie um nicht-ganzzahlige Dimensionen. Als Beispiel sei hier ein eindimensionales Linienmuster angeführt, welches tausende Male iteriert wird: Die gesamte verfügbare Zeichenfläche füllt sich mit zunehmenden Iterationsgrad. Das ursprünglich eindimensionale Muster nähert sich einem zweidimensionalen Gebilde.

Durch Gleichung 19 ist die Ermittlung der Gesamtlänge  $L(n)$  der Teilstrecken im  $n$ -ten Iterationsschritt bekannt. Für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = A(n) \cdot \varepsilon(n) = \infty, \tag{22}$$

aber mit einem gewissen kritischen  $D \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = A(n) \cdot \varepsilon^D(n) = 1. \quad (23)$$

Logarithmiert man nun die Gleichung und stellt nach  $D$  um, so ergibt sich die Dimension  $D \in \mathbb{Q}^+$  mit Hilfe der Überlegungen von Felix HAUSDORFF<sup>6</sup>:

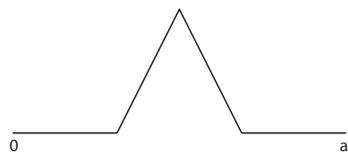
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(A(n)) + D \cdot \ln(\varepsilon(n)) = 0 \quad (24)$$

$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(A(n))}{\ln(\varepsilon(n))} \quad (25)$$

Die ermittelte Dimension  $D$  stimmt dabei mit der allgemeinen, euklidischen Dimensionsvorstellung überein. Sie kann als Maß für die Zerklüftung bzw. die Saugfähigkeit eines Fraktals interpretiert werden.

Die Berechnung der fraktalen Dimension über Gleichung 25 kann nur für einfache Geometrien erfolgen. Für komplexe Fraktale erfolgt die Ermittlung über das HAUSDORFF-Maß.

**Beispiel 6** (Skaleninvarianz der VON KOCH-Kurve<sup>7</sup>).



$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\frac{a}{3^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N} \ln(4)}{-\frac{\ln(a)}{n} + \mathcal{N} \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \quad (26)$$

$D$  ist also skaleninvariant; die Anfangs- bzw. Grundlänge ist für die fraktale Dimension des speziellen Gebildes bedeutungslos.

## 2.3 Fraktale Mengen

### 2.3.1 Mandelbrot-Menge

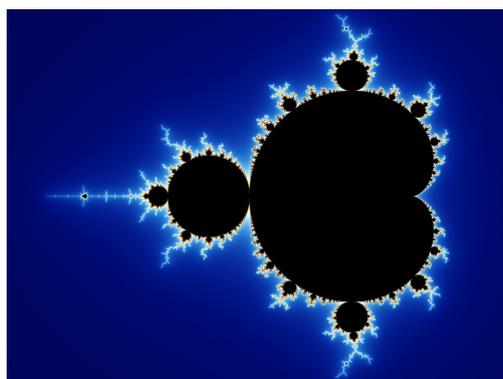


Abbildung 3: MANDELBROT-Menge (Quelle: [18])

<sup>6</sup>Felix HAUSDORFF (\* 1868 in Breslau, † 1942 in Bonn) war ein deutscher Mathematiker. Er gilt als Mitbegründer der allgemeinen Topologie und lieferte wesentliche Beiträge zur allgemeinen und deskriptiven Mengenlehre, zur Maßtheorie, Funktionalanalysis und Algebra. [11]

<sup>7</sup>Niels Fabian Helge Hartmut VON KOCH (\* 1870 in Stockholm, † 1924 ebenda) war ein schwedischer Mathematiker. [14]

**Definition 9** (MANDELBROT-Menge). Die MANDELBROT-Menge ist die Menge aller komplexen Zahlen  $d \in \mathbb{C}$ , für welche die Iteration  ${}^k R(z)$  mit  $R(z) = z^2 + d$  und  $z_0 = 0$  für  $k \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. [7]

### 2.3.2 Julia-Mengen

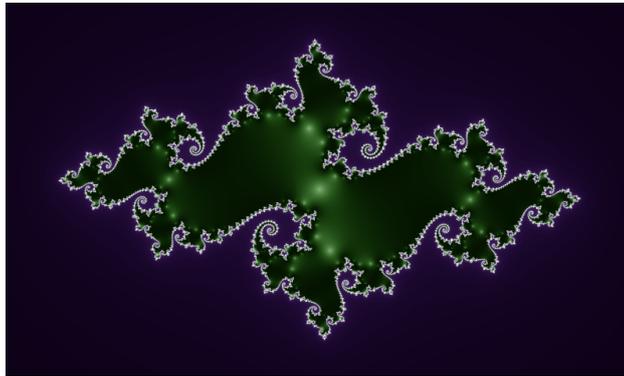


Abbildung 4: JULIA-Menge für  $z \mapsto z^2 - 0,742 + 0,1j$  (Quelle: [15])

**Definition 10** (JULIA-Mengen). Ist die Menge  $J_R$  der abstoßenden periodischen Punkte einer rationalen Funktion  $R : G \rightarrow \mathbb{C}$  abgeschlossen, d.h. gehören mit einer Folge von periodischen Punkten auch die Grenzwerte zu  $J_R$ , dann nennt man  $J_R$  JULIA-Menge von  $R$ .

**Beispiel 7.** Die JULIA-Menge von  $R(z) = z^2$  ist der Einheitskreis  $K(0, 1)$  in der komplexen Zahlenebene. Denn die Lösungen von  $z^{2^n-1} = 1$  liegen dicht in  $K(0, 1)$ . [7]

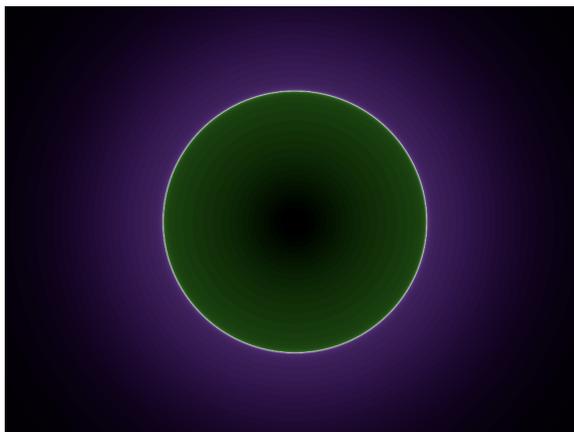


Abbildung 5: JULIA-Menge für  $z \mapsto z^2$  (Quelle: [15])

### 2.3.3 Cantor-Menge/Cantorstaub

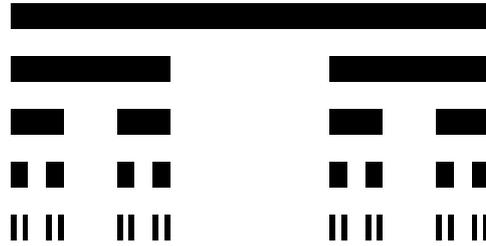


Abbildung 6: CANTOR-Staub (Quelle: [10])

Unter der CANTOR-Menge (auch als CANTOR-Staub bezeichnet) versteht man eine bestimmte Teilmenge der reellen Zahlen mit besonderen Eigenschaften. Sie ist

- kompakt, perfekt, total unzusammenhängend (Diskontinuum) und nirgends dicht
- selbstähnlich und hat eine nicht-ganzzahlige Hausdorff-Dimension (sie ist also ein Fraktal)
- gleichmächtig zum Kontinuum (der Menge der reellen Zahlen).

Ihre HAUSDORFF-Dimension  $D$  lässt sich zu

$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(A(n))}{\ln(\varepsilon(n))} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,6309 \quad (27)$$

auswerten, während sich die Gesamtlänge aller Teilstrecken für unendlich viele Iterationsschritte mit

$$L(n) = A(n) \cdot \varepsilon(n) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (28)$$

bestimmen lässt. [10]

## 3 Beispiele für weitere Fraktale in Mathematica

### 3.1 Barnsley Fern



Abbildung 7: BARNSELY Fern

Listing 1: Generierung des BARNSELY Fern in MATHEMATICA (nach [4], modifiziert)

```
1 n = 275; p = {0, 0}; image = Table[0, {n}, {n}];
```

```

2 Do[x = Random[Integer, 99];
3   p = Which[x < 3, {{0, 0}, {0, 0.16}}.p,
4     x < 76, {{0.85, 0.04}, {-0.04, 0.85}}.p + {0, 1.6},
5     x < 89, {{0.2, -0.26}, {0.23, 0.22}}.p + {0, 1.6},
6     True, {{-0.15, 0.28}, {0.26, 0.24}}.p + {0, 0.44}];
7   image[[Floor[n (p[[1]]/10 + 0.5)] + 1,
8     Floor[n p[[2]]/10 + 1]]++, {100000}];
9 Show[Graphics[
10  RasterArray[
11  Map[RGBColor[1 - 0.1 #, 1 - 0.1 #, 1 - 0.1 #] &, image, {2}]],
12  AspectRatio -> 1]]

```

### 3.2 Fractal Tree

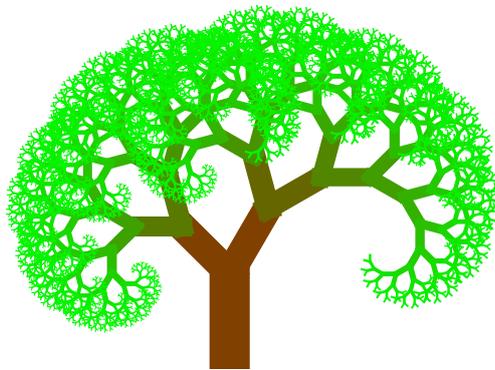


Abbildung 8: fraktaler Baum (angelehnt an den PYTHAGORAS-Baum)

Listing 2: Generierung des Fractal Tree in MATHEMATICA (Quelle: [4])

```

1 Polar[{x_, y_}, theta_, r_] := {x + r Cos[theta], y + r Sin[theta]};
2 branch[x_] := x; branch[tree_List] := branch /@ tree;
3 branch[Line[{p1_, p2_}]] :=
4   Module[{r = Sqrt[(p2[[1]] - p1[[1]])^2 + (p2[[2]] - p1[[2]])^2],
5     theta = ArcTan[p2[[1]] - p1[[1]], p2[[2]] - p1[[2]]], {Thickness[
6     0.05 r], RGBColor[0.5 r, 1 - 0.75 r, 0],
7     Line[{p2, Polar[p2, theta - Pi/6, 0.8 r]},
8     Line[{p2, Polar[p2, theta + Pi/4, 0.7 r]}]}];
9 Show[Graphics[{Thickness[0.07], RGBColor[0.5, 0.25, 0],
10  NestList[branch, Line[{0, 0}, {0, 1}], 12}], AspectRatio -> 1,
11  Background -> RGBColor[1, 1, 1], PlotRange -> {{-3, 3}, {0, 6}}]

```

### 3.3 von Koch-Schneeflocke

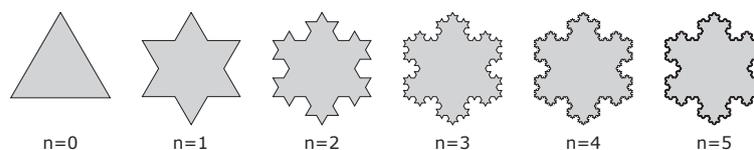


Abbildung 9: VON KOCH-Schneeflocke

Listing 3: Generierung der VON KOCH-Schneeflocke in MATHEMATICA (Quelle: [6])

```
1 split[pts_] :=
2   Module[{midpts, sides},
3     midpts[{p1_, p2_}] :=
4       Module[{vec = p2 \[Minus] p1}, {p1, p1 + vec/3,
5         p1 + vec/2 + 1/6*{\[Minus]vec[[2]], vec[[1]]*Sqrt[3],
6         p1 + (2*vec)/3}];
7     sides = Transpose[{pts, RotateLeft[pts]}];
8     Flatten[midpts /@ sides, 1];
9 koch[n_, opt_ : Null] :=
10  Module[{triang},
11    triang = Table[{Sin[2 Pi k/3], Cos[2 Pi k/3]}, {k, 0, 2}]/Sqrt[3];
12    If[opt == N, triang = N[triang]];
13    Nest[split, triang, n];
14 grph[pts_, opts_...] :=
15  Graphics[{opts, Line[Append[pts, pts[[1]]]}],
16    AspectRatio -> Automatic];
17 Show[grph[koch[4]]]
```

## Literatur

- [1] BECKER, Michael: *Julia-Mengen: Fixpunkte und periodische Punkte*. Internet: <http://www.ijon.de/mathe/julia/node6.html>, Abruf: 26. Juli 2010
- [2] LICHTER, Elke: *Banach-Iteration zur Bestimmung von Fixpunkten*, Universität Paderborn, Vorlesungs-Handout, SoS 2004. Internet: <http://www-math.uni-paderborn.de/~lichte/et8.pdf>, Abruf: 26. Juli 2010
- [3] MÜNSTERMANN, Björn: *Fraktale in Theorie und Anwendung*. Internet-Paper. Internet: [http://www.bjoernmuenstermann.de/Fraktale/Ankuendigung\\_Fraktale.pdf](http://www.bjoernmuenstermann.de/Fraktale/Ankuendigung_Fraktale.pdf), Abruf: 25. Juli 2010
- [4] NYLANDER, Paul: *Fractals*. Internet: <http://www.bugman123.com/Fractals/Fractals.html>, Abruf: 25. Juli 2010
- [5] PFLIGERSDORFFER, Christian; SPIELBERGER, Christian: *Fraktale Landschaften*, Universität Salzburg, Studienarbeit, 2002. Internet: [http://www.cosy.sbg.ac.at/~held/teaching/graphik/ps\\_pdf\\_ppt/pfligersdorffer\\_spielberger.pdf](http://www.cosy.sbg.ac.at/~held/teaching/graphik/ps_pdf_ppt/pfligersdorffer_spielberger.pdf), Abruf: 25. Juli 2010
- [6] RASP, Marco: *Fraktale Welten mit Mathematica 3.0*, Humboldt-Universität Berlin, Vortrag, 1998. Internet: <http://www2.informatik.hu-berlin.de/~rasp/vortraege/vortrag.nb.ps>, Abruf: 25. Juli 2010
- [7] SCHWARZ, René: *Simulation und numerische Methoden*, Hochschule Merseburg (FH), Prof. Hartmut Kröner, Vorlesungsmitschriften, SoS 2010
- [8] WEISSTEIN, Eric W.: *Fractal*. In: MathWorld—A Wolfram Web Resource. Internet: <http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html>, Abruf: 25. Juli 2010
- [9] WIKIPEDIA: *Benoît Mandelbrot* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beno%C3%AEt\\_Mandelbrot&oldid=76405741](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beno%C3%AEt_Mandelbrot&oldid=76405741), Abruf: 25. Juli 2010
- [10] WIKIPEDIA: *Cantor-Menge* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Cantor-Menge&oldid=76679229>, Abruf: 25. Juli 2010
- [11] WIKIPEDIA: *Felix Hausdorff* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Felix\\_Hausdorff&oldid=76343484](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Felix_Hausdorff&oldid=76343484), Abruf: 25. Juli 2010
- [12] WIKIPEDIA: *Fraktal* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fraktal&oldid=76817963>, Abruf: 26. Juli 2010
- [13] WIKIPEDIA: *Hausdorff-Dimension* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Hausdorff-Dimension&oldid=68789368>, Abruf: 25. Juli 2010
- [14] WIKIPEDIA: *Helge von Koch* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Helge\\_von\\_Koch&oldid=73441529](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Helge_von_Koch&oldid=73441529), Abruf: 25. Juli 2010
- [15] WIKIPEDIA: *Julia-Menge* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Julia-Menge&oldid=76853302>, Abruf: 25. Juli 2010
- [16] WIKIPEDIA: *Koch-Kurve* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Koch-Kurve&oldid=76842412>, Abruf: 25. Juli 2010
- [17] WIKIPEDIA: *Kontraktion (Mathematik)* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kontraktion\\_\(Mathematik\)&oldid=76419424](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kontraktion_(Mathematik)&oldid=76419424), Abruf: 26. Juli 2010
- [18] WIKIPEDIA: *Mandelbrot-Menge* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot-Menge&oldid=76824060>, Abruf: 25. Juli 2010
- [19] WIKIPEDIA: *Pythagoras-Baum* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Pythagoras-Baum&oldid=76536928>, Abruf: 25. Juli 2010
- [20] WIKIPEDIA: *Selbstabbildung* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Selbstabbildung&oldid=65795869>, Abruf: 26. Juli 2010
- [21] WIKIPEDIA: *Sierpinski-Dreieck* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sierpinski-Dreieck&oldid=75976200>, Abruf: 25. Juli 2010
- [22] WIKIPEDIA: *Stefan Banach* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Internet: [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Stefan\\_Banach&oldid=76003831](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Stefan_Banach&oldid=76003831), Abruf: 26. Juli 2010